

Задача 1. Блины

Пусть количество блинов равно B . Тогда количество сторон всех блинов будет равно $2B$, а покрытых хотя бы одной начинкой сторон — $2B-2$, так как верхняя и нижняя стороны стопки не покрыты никакими начинками.

Мы знаем, что у каждого блина ровно одна сторона намазана сметаной. Тогда количество сторон, намазанных сметаной, равно B . Также мы знаем, что треть всех блинов покрыта вареньем, т.е. таких сторон $\frac{1}{3}B$. И, наконец, 10 сторон покрыты мёдом. Таким образом, количество всех сторон, покрытых хотя бы одной начинкой, составит $B + \frac{1}{3}B + 10$. С другой стороны, это количество равно $2B-2$. Из этого можно сделать вывод, что две трети всех блинов численно равны 12, а их общее количество — 18.

Задача 2. Выражение

Для того чтобы получить наибольшее значение выражения, нам нужно максимизировать результаты каждой операции $aXb = ab - a \bmod b$. Максимальное значение достигается, когда остаток от деления $a \bmod b$ равен нулю, то есть когда a делится на b без остатка.

Используя числа от 1 до 6, будет оптимальным расположить их так, чтобы $a \bmod b = 0$ как можно чаще. При этом мы хотим, чтобы произведения ab были как можно большими.

Одно из таких оптимальных выражений: $6X2X3X4X5X1$.

Приведём последовательность вычислений данного выражения:

1. $6X2 = 6 \cdot 2 - 6 \bmod 2 = 12 - 0 = 12$
2. $12X3 = 12 \cdot 3 - 12 \bmod 3 = 36 - 0 = 36$
3. $36X4 = 36 \cdot 4 - 36 \bmod 4 = 144 - 0 = 144$
4. $144X5 = 144 \cdot 5 - 144 \bmod 5 = 720 - 4 = 716$
5. $716X1 = 716 \cdot 1 - 716 \bmod 1 = 716 - 0 = 716$

Таким образом, максимальное значение данного выражения равно 716.

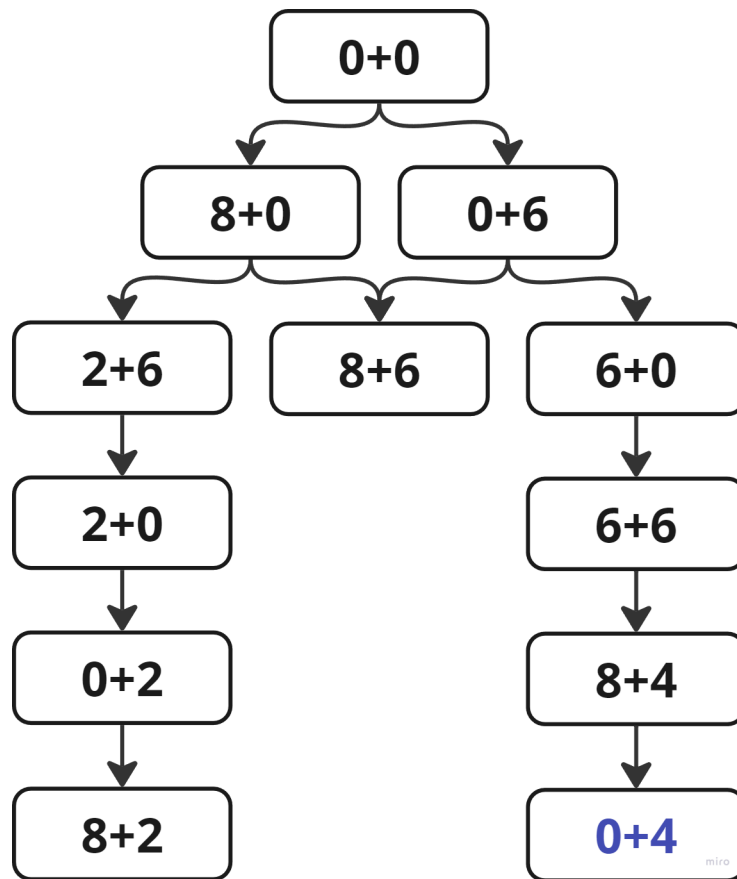
Обратите внимание, что таких оптимальных выражений может быть несколько. Полный балл набирают выражения, которые дают в ответе число 716.

Задача 3. Вёдра с водой

В первом вопросе требуется найти минимальную последовательность действий, которую Кате необходимо выполнить, чтобы в двух вёдрах — ведре А (8 литров) и ведре В (6 литров) — получилось в сумме 4 литра воды. Ответ должен быть представлен в виде номеров действий, записанных подряд без разделителей.

Для решения этого вопроса можно построить дерево, в котором каждая вершина представляет текущее состояние ведер после выполнения определенных действий. Под состоянием будем понимать количество воды в каждом из вёдер, обозначенное парой чисел. Например, состояние $3 + 4$ означает, что в первом ведре содержится 3 литра воды, а во втором — 4 литра. В дереве будут храниться только уникальные состояния, которых не было на предыдущих шагах.

На следующем изображении представлено данное дерево состояний.

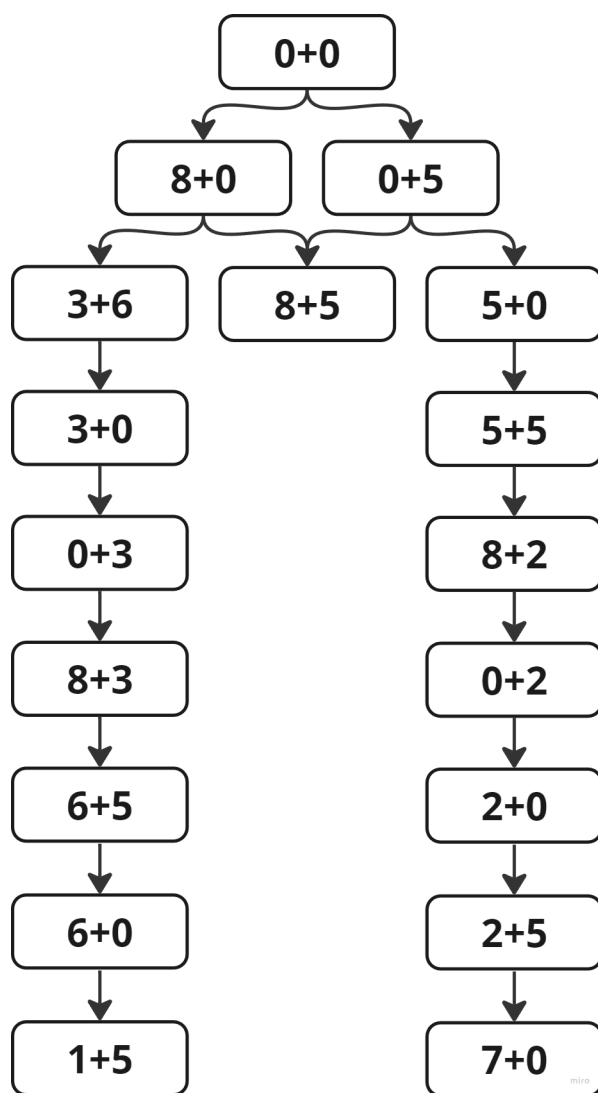


Из рисунка видно, что ответом будет являться последовательность действий 24245.

Во втором вопросе нужно определить, сколько различных ненулевых объёмов воды можно получить в двух вёдрах, если объём ведра А составляет 8 литров, а ведра В — 6 литров. Обратим внимание, что суммарный объём воды в обоих вёдрах всегда будет чётным числом, так как в результате выполняемых операций количество воды в каждом ведре остаётся четным. Следовательно, возможные объёмы воды могут быть следующими: 2, 4, 6, 8, 10, 12 и 14 литров. Всего таких объёмов 7, что и является ответом на второй вопрос.

Также можно сделать обоснованное предположение, что в общем случае возможные объёмы воды будут кратны наибольшему общему делителю объёмов первого и второго вёдер.

В третьем вопросе нужно определить все возможные ненулевые суммарные объёмы воды, которые можно получить в вёдрах А (8 литров) и В (5 литров), используя не более 8 действий. Поскольку вёдра имеют объёмы 8 и 5 литров, которые не имеют общих делителей, кроме 1, теоретически можно получить любой целый объём воды от 1 до 13 литров (сумма объёмов вёдер). Однако с ограничением в 8 действий не все объёмы могут быть достигнуты. Чтобы выяснить, какие именно объёмы можно получить, построим дерево состояний, аналогичное тому, которое было использовано в первом вопросе:



Из рисунка видно, что за 8 действий можно получить следующие объёмы воды: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 и 13 литров.

Задача 4. Правда или Ложь

Ответим на вопросы по порядку.

Во-первых, отметим, что правдолюбцы из Правдино всегда отвечают «Да» на первый вопрос, лжецы из Лжецово также дадут положительный ответ, поскольку всегда говорят ложь. Точно так же хитрецы из Хитрецово солгут о своём местоположении и ответят «Д». Поскольку на первый вопрос было получено 360 ответов «Да», это означает, что во всех трёх населённых пунктах проживает 360 человек. Таким образом, это и есть ответ на первый вопрос.

На второй и третий вопросы было получено 480 ответов «Нет». Обратим внимание на то, что одновременно на оба вопроса отрицательно ответят только жители Правдино, так как остальные ответят «Да» про свой населённый пункт. Следовательно, из этих 480 ответов можно вычесть общее число жителей всех трёх поселений, чтобы получить количество жителей Правдино: $480 - 360 = 120$. Это ответ на второй вопрос.

Таким образом, количество жителей Лжецово и Хитрецово составляет $360 - 120 = 240$, что является ответом на третий вопрос.

Теперь рассмотрим следующее. Предположим, что оба утверждения осведомителя истинны. Тогда в Лжецово проживает в два раза больше людей, чем в Хитрецово. В этом случае количество лжецов будет равно $240 : 3 \cdot 2 = 160$, что является ответом на четвёртый вопрос.

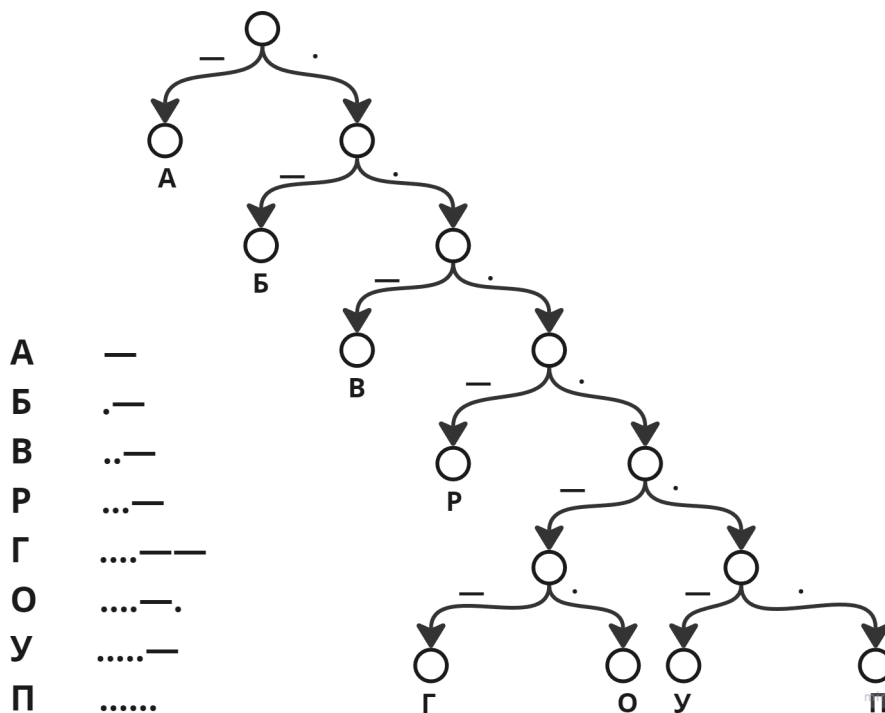
Если же предположить, что оба утверждения осведомителя ложны, то в Лжецово и Хитрецово живёт одинаковое количество людей и их число равно $240 : 2 = 120$. Это и есть ответ на пятый вопрос.

Задача 5. Азбука Морзе v2

Чтобы помочь Ване закодировать текст с минимальным количеством точек и тире, необходимо создать такой код, в котором более частым буквам соответствуют более короткие кодовые последовательности, а менее частым — более длинные. Это позволит сократить общее количество символов, необходимых для кодирования всего текста.

Сначала присвоим самые короткие кодовые последовательности наиболее частым буквам. Букве «А», встречающейся 100 раз, назначим самую короткую последовательность — из одного символа. Поскольку в азбуке Морзе используются точки и тире, для определённости выберем тире для обозначения «А». Букве «Б» с частотой 90 (второй по частотности) назначим последовательность из двух символов: он будет начинаться с точки (чтобы отличаться от кода «А») и заканчиваться тире.

Теперь необходимо присвоить коды остальным буквам так, чтобы ни одна кодовая последовательность не была началом другой и при этом общее количество символов было минимальным. Один из возможных вариантов представлен на следующем рисунке:

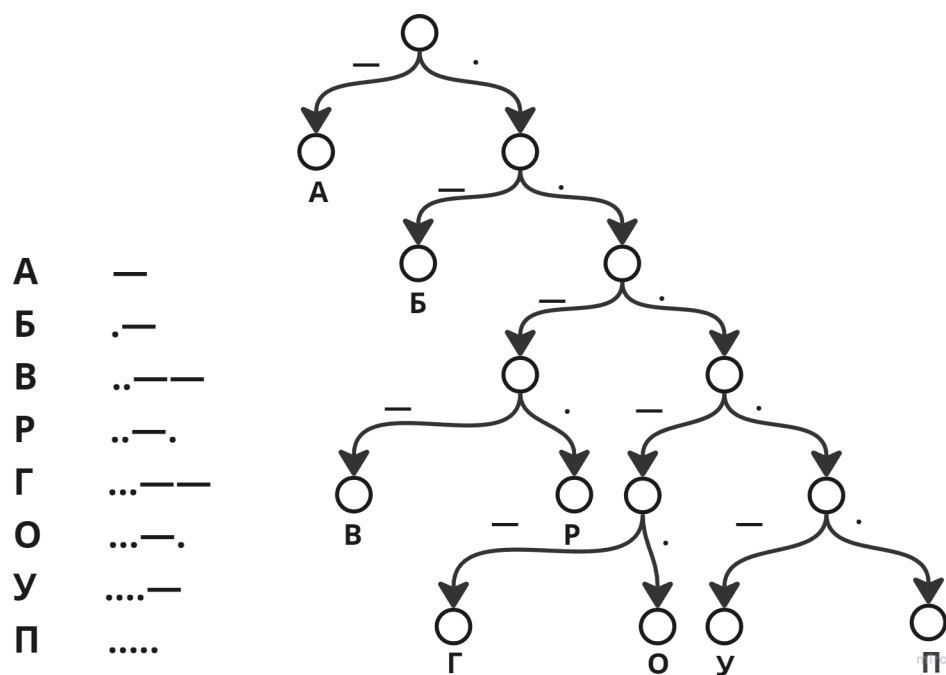


Здесь все коды расположены в виде дерева, где на линиях, соединяющих вершины, указаны точки или тире, а в листьях — буквы. Спускаясь от самой верхней вершины дерева к каждой букве, можно получить её уникальный код.

Теперь посчитаем общее количество символов, необходимых для кодирования текста:

$$100 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + 11 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 9 \cdot 6 + 15 \cdot 4 = 625$$

Подумаем, как можно уменьшить это количество. Изменим коды букв «В» на ..- -, а «Р» на ...-. Для буквы «В» длина кодовой последовательности увеличится до 4 символов, а для «Р» останется прежней. Пересчитаем общее количество символов. Поскольку кодовая последовательность буквы «В» стала длиннее на один символ, общее количество символов увеличилось на 25, составив 650. На первый взгляд может показаться, что ситуация ухудшилась. Однако сейчас мы можем сократить длины последовательностей букв «Г», «О», «У», «И» с 6 до 5 символов, что уменьшит количество символов на $11 + 10 + 5 + 9 = 35$. В итоге получится 615 символов.



Анализ полученных кодовых последовательностей показывает, что это решение является наиболее оптимальным. В ответе следует записать соответствующие последовательности точек и тире.

Обратите внимание, что в ответе точки можно заменить на тире и наоборот, в итоге также получим верное решение.